**Formulation dynamique de GEM4**

**Section 2 : Les équations discrètes à la verticale et dans le temps**

**Annexes**

par

René Laprise

Centre ESCER pour l’étude et la simulation du climat régional

Département des sciences de la Terre et de l’atmosphère

Université du Québec à Montréal (UQAM)

Rédaction : 23 janvier 2015

Dernière modification : 2015-02-04

**Annexe 1**

Démonstration que la définition de l’interpolation des niveaux thermodynamiques aux niveaux momentum assure que les opérateurs de dérivée verticale et de moyenne verticale commutent lors qu’appliqué sur une variable définie sur les niveaux momentum



La dérivée verticale d’une variable définie sur les niveaux momentum, est évaluée sur les niveaux thermodynamiques comme

, 

et la moyenne verticale d’une variable définie sur les niveaux thermodynamiques est évaluée sur les niveaux momentum comme



En combinant ces équations on obtient



Par ailleurs la moyenne verticale d’une variable définie sur les niveaux momentum évaluée sur les niveaux thermodynamiques est

, 

et la dérivée verticale d’une variable définie sur les niveaux thermodynamiques est évaluée sur les niveaux momentum comme



En combinant ces équations on obtient



Ceci confirme donc que



Q.E.D.

**Annexe 2**

Démonstration la définition de l’interpolation des niveaux momentum aux niveaux thermodynamiques n’assure pas que les opérateurs de dérivée verticale et de moyenne verticale commutent, sauf dans le cas particulier où les niveaux sont également espacés

 en général

La dérivée verticale d’une variable définie sur les niveaux thermodynamiques est évaluée sur les niveaux momentum comme

, 

et l’interpolation des niveaux momentum aux niveaux thermodynamiques est définie comme



de sorte que



Par ailleurs la moyenne verticale d’une variable définie sur les niveaux thermodynamiques est évaluée sur les niveaux momentum comme

, 

Et la dérivée verticale d’une variable définie sur les niveaux momentum est évaluée sur les niveaux thermodynamiques comme



de sorte que



Il s’agit donc de vérifier l’égalité suivante :



Considérons le coefficient de  :



ce qui est vérifié. Considérons le coefficient de  :



ce qui est aussi vérifié. Considérons maintenant le coefficient de  :



ce qui ne semble pas satisfait en général, sauf si les niveaux sont également espacés, dans lequel cas ce terme est nul.

**Annexe 3 : Linéarisation des équations**

Quoique cette étape soit classique et bien connue des spécialistes du schéma implicite ou des ondes atmosphériques, nous allons donner ici quelques détails sur les manipulations requises pour extraire la partie linéaire des équations.

La technique générale pour linéariser une équation consiste à considérer une perturbation infinitésimale autour d’un état de base judicieusement choisi pour simplifier la tâche subséquente. Considérons une équation générale  dont on fait l’expansion en série de Taylor autour d’un un état de base  :



Décomposons  de sorte que  représente une perturbation d’amplitude infinitésimale, , et  représente un état de base simple, non perturbé, choisi tel que . On obtient donc



Comme , on obtient une équation linéaire comme approximation à l’ordre dominant :



Ainsi construite, cette équation assurément linéaire dans la variable dépendante . L’état de base choisi est au repos, en équilibre hydrostatique et horizontalement uniforme :

,  et ,

, ce qui correspond à ,

, ce qui correspond à ,

, ce qui correspond à  et .

 et , ce qui correspond à ,

On peut facilement vérifier que ce choix de l’état de base satisfait les équations, i.e. . Par la suite on omettra le prime  pour alléger la notation.

La stratégie de solution du schéma implicite consiste à d’abord isoler la partie linéaire des termes dynamiques

 (G14.43)

où  et , et la partie non-linéaire résiduelle est ainsi

 (G14.44)

Rappelons aussi que pour les deux équations diagnostiques (i.e. sans dérivées temporelles) , de sorte que les équations se simplifient à . Pour alléger la notation, nous omettrons l’exposant  par la suite. L’état de base sera considéré comme uniforme « horizontalement », suivant la coordonnée verticale généralisée .

1. **De l’équation du mouvement horizontal ()**

 (G14.32)

on obtient



dont la partie linéaire est



Toutefois, pour simplicité, on a choisi de ne pas intégrer le terme de Coriolis à la partie linéaire vue que l’échelle temporelle de ce terme est longue et donc ne risque pas de générer d’instabilités numériques; de plus ceci a l’avantage de garder les facteurs représentant l’état de base constants à l’horizontale. Ainsi en pratique on utilise plutôt



où . Ainsi la partie résiduelle est



1. **L’équation du mouvement vertical ()**

 (G14.33)

étant linéaire, on obtient



et donc



1. **Considérons maintenant l’équation thermodynamique () :**

 (G14.34)

On peut écrire



où on identifie la partie linéaire comme étant . On obtient ainsi



ou de façon plus compacte



avec , et ainsi



1. **De l’équation de continuité ()**

 (G14.35)

on obtient 

Considérons l’expansion 

où on identifie la contribution linéaire comme étant  de sorte que



Notons qu’on a utilisé  et non  dans la partie linéaire de sorte à permettre plus tard le regroupement de termes dans la variable . Maintenant ajoutons et soustrayons  à cette équation



regroupons et exprimons en termes de la variable  précédemment définie



La partie résiduelle non-linéaire est



1. **L’équation cinématique ()**

 (G14.36)

est linéaire de sorte que 

En ajoutant et soustrayant , on obtient :



La partie résiduelle non-linéaire est simplement 

1. **L’équation hydrostatique diagnostique () est**

 (G14.37)

Considérons l’expansion



où l’on reconnait les parties linéaires comme , de sorte que



et la partie non-linéaire comme



1. **Finalement considérons l’équation du géopotentiel diagnostique () :**

 (G14.38)

Comme précédemment faisons l’expansion



où l’on reconnait la partie linéaire comme  de sorte que



Ajoutons et soustrayons  pour obtenir



La partie résiduelle non-linéaire est



**Annexe 4 : Construction de l’équation elliptique**

Il s’agit ici de construire une équation unique en termes d’une seule variable par élimination des autres variables présente dans le système d’équation linéaires couplées suivant :



1. Éliminons  :



1. Éliminons  :



1. Éliminons  :



On notera que la simplification n’a été possible que parce que .

1. Éliminons  :



1. Autre étape en vu de l’élimination de toutes les autres variables sauf  :



1. Élimination de  et  :



Cette équation est une équation elliptique du 2e ordre à l’horizontale et à la verticale en termes de la variable .

Notons que cette équation elliptique correspond à la version discrète de l’équation d’onde pour les ondes mixtes gravité-élastiques, comme Girard et Plante (rapport interne de RPN, p. 20) l’ont montré. Considérons le facteur



où  est la hauteur d’échelle et  la fréquence de Brunt-Vaïsälä. Considérons maintenant le facteur



où  est le carré de la vitesse du son. Ainsi



ou alternativement



que l’on peut comparer avec l’éq. A19 de Laprise (1992), en identifiant  et . On peut noter la 4e puissance de , correspondant aux 4 fréquences présentes (2 ondes de gravité et 2 ondes élastique), l’onde de Rossby étant absente étant donné qu’on a choisi de ne pas intégrer le paramètre de Coriolis au problème linéaire pour conserver les coefficients constants à l’horizontale.

**Annexe 5 : Conditions aux frontières de l’équation elliptique**

Pour compléter le système, on a besoin de deux équations constituant les conditions aux frontières supérieure et inférieure du domaine vertical. Ces équations sont obtenues en appliquant l’équation



aux deux frontières. Pour rappel :



Ainsi à la frontière supérieure, on a

 (G14.46)

car



vu que ,  et , si on accepte les approximations  et .

À la frontière inférieure, on a



avec



car  et  de sorte que . Si on accepte les approximations  et , on a alors



de sorte que



Et si on accepte l’approximation , on peut alors réarranger l’expression précédente. Considérons le facteur de  :



Ainsi on peut écrire

 (G14.47)