**Formulation dynamique de GEM4**

**Section 2 : Les équations discrètes à la verticale et dans le temps**

par

René Laprise

Centre ESCER pour l’étude et la simulation du climat régional

Département des sciences de la Terre et de l’atmosphère

Université du Québec à Montréal (UQAM)

Rédaction : 23 janvier 2015

Dernière modification : 2015-02-05

Ce document fournit des détails algébriques sur la formulation dynamique de la version 4 du modèle canadien GEM (GEM4) décrite par Girard et al. (2014, ci-après G14). Il a été conçu dans un but pédagogique et il est principalement destiné aux étudiants et attachés de recherche du Centre ESCER de l’UQAM. Une première section a décrit les équations continues; cette seconde section décrit la discrétisation verticale et le schéma temporel. La 3e section donne les références pertinentes.

# Section 2 : Les équations discrètes à la verticale et dans le temps

Rappel sur les équations continues en coordonnée  développées à la Section 1.

L’équation du mouvement horizontal () :

 (G14.25)

L’équation du mouvement vertical () :

 (G14.26)

L’équation thermodynamique () :

 (G14.27)

L’équation de continuité () :

 (G14.28)

L’équation cinématique () :

 (G14.29)

L’équation hydrostatique diagnostique () :

 (G14.30)

L’équation du géopotentiel diagnostique () :

 (G14.31)

## Discrétisation verticale

Grille décalée

Tel que discuté dans G14, il est avantageux d’utiliser une grille décalée (*staggered* en anglais) à la verticale pour éviter la présence de modes numériques et obtenir la précision optimale dans la discrétisation verticale.

La grille décalée est constituée de deux séries de niveaux intercalés. L’une est étiquetée de nombres entiers et est dite « momentum »; l’autre est étiquetée de nombres fractionnaires et est dite « thermodynamique ».

Les variables pronostiques  et  ainsi que la variable diagnostique  sont placées sur les niveaux momentum, alors que les variables pronostiques  et  ainsi que les variables diagnostiques  et  sont placées sur les niveaux thermodynamiques. La variable pronostique  est évidemment à la surface. Par la suite nous noterons les variables définies sur les niveaux momentum comme  et celles définies sur les niveaux thermodynamiques comme .

**Grille décalée Charney-Phillips**

Niveaux Niveaux

Thermo. Momentum

(fractions) (entiers)

 ============  ================================

,  . . . . . . . , , 

 ------------------------------- , , , 

,  . . . . . . . , , 

 ------------------------------- , , , 

,  . . . . . . . , , 

,  . . . . , , 

 ------------------------------- , , , 

,  . . . . , , 

 ------------------------------- , , , 

,  . . . . . . , , 

 - - - - - - - - - - - - - - - - , , 

 ====== ,  fixe, ,  =====================

(Fig. 4 de G14) Grille décalée de GEM4, montrée avec N niveaux, pour le cas dit « *truncated top*» dans Girard et al. (2014). Les niveaux dynamiques sont indiqués par des indices entiers et les niveaux thermodynamiques sont indiqués par des indices fractionnaires.

Conditions aux frontières

Les frontières supérieure et inférieure du domaine du modèle correspondent respectivement aux niveaux  et  où sont posés les conditions de flux nul :  et .

Emplacement des niveaux

Les niveaux dynamiques sont considérés comme les niveaux principaux et ils définissent la grille verticale  dans l’intervalle . Les niveaux thermodynamiques sont définis comme étant situés à mi-chemin (en coordonnée du logarithme de la pression, donc approximativement en hauteur), entre les niveaux dynamiques,  dans l’intervalle , sauf pour le niveau thermodynamique inférieur  qui est situé à mi-chemin entre le plus bas niveau dynamique et la surface : .

Dérivées verticales

Les dérivées verticales sont calculées comme des différences finies centrées, offrant une précision du 2e ordre.

Pour les variables définies sur les niveaux momentum, leur dérivée peut être évaluée sur les niveaux thermodynamiques comme suit :

,

pour  avec , et au plus bas niveau



Pour les variables définies sur les niveaux thermodynamiques, la dérivée peut être évaluée sur les niveaux momentum comme suit

,

pour , avec . Près de la frontière supérieure ( ci-dessus), on supposera que , et près de la frontière inférieure ( ci-dessus), on supposera que  et .

Interpolation verticale

Quand des termes sont requis sur des niveaux autres que ceux sur lesquels ils sont définis, ils sont interpolés (moyennés) entre les niveaux adjacents à la verticale.

1. Interpolation des niveaux thermodynamiques aux niveaux momentum

L’interpolation des niveaux thermodynamiques aux niveaux momentum est définie comme suit

 pour 

On notera que les poids donnés aux deux niveaux adjacents sont inversés par rapport à ceux correspondant à une interpolation linéaire, car le plus grand poids est donné au niveau le plus éloigné. En fait ces poids correspondent à ceux d’un schéma aux éléments finis constants par morceaux (e.g. Laprise et Girard 1990, éq. 4.2) où le plus grand poids est donné à la couche adjacente la plus épaisse. G14 notent que cette définition de l’interpolation des niveaux thermodynamiques aux niveaux momentum assure que les opérateurs de dérivée verticale et de moyenne verticale commutent (), tel que démontré en Annexe 1. Cette propriété sera très utile lors de la construction de l’équation elliptique associée au schéma implicite, comme on le verra par la suite.

À la frontière inférieure (), on suppose que  et , de sorte que . À la frontière supérieure (), on extrapole en supposant les champs constants : .

G14 notent cette interpolation de façon compacte comme suit :



où les poids sont définis comme

 et  pour 

et près de la frontière inférieure



avec  et .

1. Interpolation des niveaux momentum aux niveaux thermodynamiques

L’interpolation des niveaux momentum aux niveaux thermodynamiques est définie de manière cohérente avec l’emplacement des niveaux thermodynamiques situés à mi-chemin des niveaux dynamiques, ce qui assure une précision du 2e ordre :

, pour 

et près des frontières, on extrapole en supposant les champs constants :

 et 

G14 notent cette interpolation de façon compacte comme suit :



où les poids sont définis comme

 et  pour 

et près des frontières :

 et 

[À moins d’erreur de ma part, il semblerait y avoir une erreur typographique dans G14 qui donne  et  pour ces valeurs.]

On notera toutefois que cette définition de l’interpolation des niveaux momentum aux niveaux thermodynamiques n’assure pas que les opérateurs de dérivée verticale et de moyenne verticale commutent () en général, sauf dans le cas particulier où les niveaux sont également espacés, tel que démontré en Annexe 2. Toutefois ceci ne pose pas problème car on ne semble pas avoir besoin de cette propriété dans la solution de l’équation elliptique.

Choix des niveaux où sont appliquées les équations

Certaines équations sont appliquées sur les niveaux momentum et d’autres sur les niveaux thermodynamiques, tel qu’indiqué ci-dessous. Au besoin, on interpole les variables lorsqu’elles ne sont pas disponibles sur le niveau requis.

L’équation du mouvement horizontal (, sur niveaux momentum) :

 (G14.32)

L’équation du mouvement vertical (, sur niveaux thermodynamiques) :

 (G14.33)

L’équation thermodynamique (, sur niveaux thermodynamiques) :

 (G14.34)

L’équation de continuité (, sur niveaux momentum) :

 (G14.35)

L’équation cinématique (, sur niveaux thermodynamiques) :

 (G14.36)

L’équation hydrostatique diagnostique (, sur niveaux thermodynamiques) :

 (G14.37)

L’équation du géopotentiel diagnostique (, sur niveaux thermodynamiques) :

 (G14.38)

## Discrétisation temporelle

L’intégration temporelle est réalisée en solutionnant avec les schémas implicite et semi-lagrangien. Le système d’équations couplées précédemment cité[[1]](#footnote-1) peut être écrit sous forme synthétique comme suit



où  en référence aux équations précédemment citées,  correspond aux variables pronostiques,  aux contributions dynamiques et  aux contributions des paramétrages physiques. Ces contributions physiques seront implantées comme une correction à la fin de chaque pas de temps (*splitting method* en anglais), apparemment sans rencontrer les problèmes potentiels soulevés par A. Caya et al. (1998).

Nous considèrerons par la suite uniquement l’équation suivante :

 (G14.40)

Cette équation est approximée de la manière suivante



avec  et . Notons que pour les deux équations diagnostiques (i.e. sans dérivées temporelles) , de sorte que les équations se simplifient à , qui sont néanmoins aussi solutionnées par les schémas implicite et semi-lagrangien.

Suivant le schéma semi-lagrangien,  correspond à la valeur du champ  au temps prévu, aux points d’arrivée () choisis comme correspondant aux points de la grille, et  correspond à la valeur du champ  au point de départ (), en amont selon la rétro-trajectoire, au temps actuel (idem pour ). La valeur  est obtenue par interpolation cubique en trois dimensions à partir des valeurs aux points de grille près de la position amont.

Selon le schéma implicite semi-lagrangien, les contributions dynamiques sont calculées comme une moyenne le long de la trajectoire entre deux pas de temps. Une moyenne non centrée est employée avec valeur de décentrage  afin de minimiser le bruit associé aux forçages stationnaires avec de longs pas de temps (Rivest et al. 1994). Ainsi

 (G14.41)

La rétro-trajectoire est calculée approximativement comme suit



suivant un schéma semblable à celui décrit par Yeh et al. (2002; section 2c); voir le rapport interne de Girard et Plante (2013; p. 67 et suivantes) pour les détails des options disponibles.

En regroupant à gauche de l’égalité les termes au temps futur, on obtient :

 (G14.42)

où  et . Ainsi les termes de gauche  correspondent aux valeurs prévues aux points de grille qu’on cherche à obtenir pour le temps futur, et les valeurs de droites  à des valeurs au temps actuel, mais qui doivent être interpolées à partir des valeurs connues aux points de grille.

La stratégie de solution du schéma implicite consiste à isoler d’abord la partie linéaire du terme à gauche

 (G14.43)

donc  (G14.44)

Puis on solutionne



Mais étant donné que  n’est pas encore connu, cette équation doit être solutionnée de façon itérative pour que le schéma soit parfaitement implicite.

Linéarisation des équations

La prochaine étape consiste en la linéarisation des équations. Quoique cette étape soit classique et bien connue des spécialistes du schéma implicite ou des ondes atmosphériques, nous allons donner à l’Annexe 3 quelques détails sur les manipulations requises pour extraire la partie linéaire des équations.

Les parties linéaires des équations au temps futur, , sont les suivantes, omettant l’exposant  pour alléger la notation :



où



Construction d’une équation elliptique

Les 8 équations pour  citées ci-dessus (8 car  compte 2 composantes) constituent un système d’équations linéaires couplées qu’il faut résoudre pour obtenir les variables au temps futur. Il s’agit donc de construire une équation unique en termes d’une seule variable par élimination des autres variables. Le détail des diverses manipulations algébriques est donné à l’Annexe 4.



Cette dernière équation constitue le membre de gauche d’une équation elliptique du 2e ordre à l’horizontale et à la verticale qu’il faudra résoudre, opération équivalente à inverser une matrice tri-diagonale quant à la partie verticale :



Pour compléter le système on a besoin de deux équations constituant les conditions aux frontières supérieure et inférieure du domaine vertical. Ces équations sont obtenues en appliquant l’équation  aux frontières, tel que démontré en Annexe 5. Ainsi on obtient à la frontière supérieure

 (G14.46)

et à la frontière inférieure

 (G14.47)

Ainsi cette partie linéaire  est exprimée en termes de la valeur de la variable  au temps futur que l’on cherche. Il faut alors résoudre par itération



Le problème non-linéaire

La solution complète doit évidemment aussi inclure les « membres de droite »  qui sont sont formés de variables que l’on connait, soit  constitué de variables au temps présent que l’on doit interpoler au point amont (départ de la rétro-trajectoire) à partir de variables connues aux points de grille, soit les termes non-linéaires  constitué de variables obtenues à l’itération précédente comme estimé de celles au temps futur. Pour chacune des équations ci-dessus, les membres de droite sont formés en prenant les mêmes opérations que précédemment avec les membres de gauche en vue de former l’équation elliptique; voir Girard et Plante (2013; p. 21) pour les détails.

Obtention des autres variables

Une fois obtenue la valeur de  au temps futur, les autres variables sont obtenues par substitution dans les équations intermédiaires, en suivant la procédure inverse de celle suivie pour obtenir l’équation elliptique (*back substitution* en anglais). Voir Girard et Plante (2013; p. 22) pour les détails.

1. Notons qu’on compte 6 équations pronostiques, c’est-à-dire avec des dérivées temporelles (l’équation du mouvement horizontal comptant pour deux à cause des deux composantes du vent). L’équation de continuité (G14.35) une fois intégrée à la verticale soumise aux conditions frontières supérieure et inférieure  devient une équation pour la variable  à la surface. Donc on a 5 équations multi-niveaux et une équation à un niveau. Ceci concorde bien avec le résultat de l’étude des ondes atmosphériques avec les équations d’Euler qui nous enseigne qu’il y a que 5 fréquences principales correspondant à des ondes internes (une onde de Rossby, deux composantes d’onde de gravité et deux composantes d’onde élastique), ainsi qu’un mode externe (le mode de Lamb). [↑](#footnote-ref-1)