**Formulation dynamique de GEM4**

**Section 1 : Les équations continues**

**Annexes**

par

René Laprise

Centre ESCER pour l’étude et la simulation du climat régional

Département des sciences de la Terre et de l’atmosphère

Université du Québec à Montréal (UQAM)

Rédaction : 16 février 2015

Dernière modification : 2015-02-04

**Annexe : Coordonnée verticale généralisée**

Cette section est tirée des notes du cours SCA7001 – Dynamique de l’atmosphère, du programme de 2e cycle en sciences de l’atmosphère à l’UQAM.

Considérons une famille de surfaces  avec variations monotones selon  :



Une coordonnée  est dite monotone si sa dérivée  est du même signe partout dans le domaine. Ceci est équivalent à dire qu’en toute colonne , il n’y a qu’une seule valeur de  pour chaque valeur de , et une seule valeur de  pour chaque valeur de .

**Dérivée totale**

La définition de la dérivée totale découle de l'application systématique de la règle de la dérivée à la chaîne. En coordonnée de hauteur, elle prend la forme suivante :

 (A1.1a)

On utilisera la convention que le symbole  à droite d'une dérivée indique que celle-ci est prise en gardant la valeur de la coordonnée constante. Ainsi  signifie que le gradient est évalué sur une surface horizontale, où  est constant. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on n'indiquera que le minimum d'indices nécessaires pour simplifier la notation (comme dans la deuxième ligne de l'équation ci-dessus).

La même règle de dérivée à la chaîne, appliquée en coordonnée , donne la forme suivante pour la dérivée totale en coordonnée générale :

 (A1.1b)

où . Ici  signifie que le gradient est évalué sur une surface où  est constant. Noter que c’est toujours le mouvement horizontal (à *z* constant) qui entre dans le terme d’advection horizontale. Notez aussi que le rôle du mouvement vertical est maintenant altéré, et  remplace .

**Dérivée verticale**

Vu que les surfaces  sont des fonctions , alors par la règle de la dérivée à la chaîne on obtient :

 (A1.2)

Le terme de gauche représente la dérivée verticale en coordonnée de hauteur. Le premier terme de droite est le facteur de conversion, facteur qui en général est fonction de  et tient compte des unités différentes pour  et , et le second facteur de droite est la dérivée "verticale" en coordonnée générale.

**Dérivée temporelle ou horizontale**

Considérons une fonction  dont on veut évaluer la dérivée temporelle ou horizontale. Certaines relations peuvent être obtenues par simple analyse géométrique entre des variations à  constant et des variations à  constant :



On a évidemment la relation suivante :



En divisant, disons, par  on obtient :



Prenant la limite d'incrément infinitésimal, on obtient alors la relation différentielle suivante :



De gauche à droite, les termes représentent respectivement la dérivée de  sur une surface de  constant, la pente de la surface  constant par rapport à , la variation verticale du champ en question, et la dérivée de  sur une surface de hauteur constante. Par induction, force est de conclure qu'en général on a :



et avec (A1.2)

 (A1.3a)

pour le gradient d’un scalaire. Pour la divergence d’un vecteur , on a ainsi :

 (A1.3b)

De même, pour une dérivée temporelle, on a

 (A1.4)

**Équation de continuité**

En coordonnée de hauteur, la loi de conservation de la masse énoncée sous la forme lagrangienne est :



En utilisant les relations de transformation précédemment établies, on a :



Avec la définition du mouvement vertical, la dernière relation peut se réécrire comme suit :



En substituant ces relations dans l’équation de continuité, on obtient :



En annulant les 2 termes identiques, on a :



En combinant les 2 premiers termes, on obtient :



Ainsi en coordonnée généralisée , la forme lagrangienne peut s’écrire comme suit :



alors qu’en coordonnée de hauteur , elle est :



En coordonnée généralisée , la forme eulérienne peut s’écrire comme suit :



alors qu’en coordonnée de hauteur , elle est :



On note que  joue le rôle d’une densité en coordonnée généralisée. Cette variable a des unités cohérentes avec la coordonnée (), de sorte que la masse totale s’obtient en intégrant comme suit en coordonnée généralisée :



alors qu’en coordonnée de hauteur, on avait :



L’équation de continuité peut aussi s’écrire comme suit :



On doit prendre la valeur absolue pour tenir compte du cas où . En utilisant la relation d’état  (G14.4), l’équation de continuité peut aussi s’écrire

 (G14.14)

étant donné que  est constant.