**Formulation dynamique de GEM4**

**Section 1 : Les équations continues**

par

René Laprise

Centre ESCER pour l’étude et la simulation du climat régional

Département des sciences de la Terre et de l’atmosphère

Université du Québec à Montréal (UQAM)

Rédaction : 16 février 2015

Dernière modification : 2015-02-04

Ce document fournit des détails algébriques sur la formulation dynamique de la version 4 du modèle canadien GEM (GEM4) décrite par Girard et al. (2014, ci-après G14). Ce document a été conçu dans un but pédagogique et il est principalement destiné aux étudiants et attachés de recherche du Centre ESCER de l’UQAM. Une première section décrit les équations continues; la seconde section décrira la discrétisation verticale et le schéma temporel. La 3e section donne les références pertinentes.

# Section 1 : Les équations continues

**Équations d’Euler**

Le point de départ est constitué des équations d’Euler, équations pleinement élastiques et non-hydrostatiques, en suivant l’approximation traditionnelle d’atmosphère mince. Exprimées en coordonnée de hauteur , ces équations sont :

 (G14.1a)

 (G14.1b)

 (G14.2)

 (G14.3)

 (G14.4)

avec la dérivée temporelle totale

****

et le vent horizontal



Afin d’éviter toute ambigüité par la suite, nous notons la dérivé temporelle locale  et la dérivé horizontale  pour signifier qu’elles sont calculées sur des surfaces de hauteur constante.

On peut éliminer la densité en substituant la relation d’état dans les équations où elle apparait. On obtient alors :

 (G14.5a)

 (G14.5b)

 (G14.6)

 (G14.7)

La dernière équation est obtenue de (G14.4) en notant que



et en additionnant (G14.3) et (G14.6).

Comme la pression n’apparait que sous la forme de son logarithme, on considèrera par la suite  comme une variable à part entière. Si on avait besoin de la densité (par exemple dans la physique), on pourra utiliser la relation d’état (G14.4) pour l’obtenir :



**Coordonnée verticale généralisée**

Pour les fins de modélisation, il s’avère pratique d’utiliser une coordonnée verticale autre que la hauteur , notamment afin de faciliter par exemple l’implantation de la topographie ou du schéma temporel implicite. Kasahara (1974) fournit le formalisme pour transformer les équations dans une coordonnée verticale relativement générale, la seule contrainte étant que la coordonnée soit monotone.

Tel que démontré en Annexe, les dérivées se transforment comme suit :

la dérivée verticale 

la dérivée horizontale 

la dérivée temporelle locale 

la dérivée totale  (G14.15)

Dans ces équations  signifie que le gradient « horizontal » est maintenant évalué sur une surface de  est constant. Notons toutefois que c’est toujours le mouvement horizontal (à  constant) qui entre dans le terme d’advection horizontale. Notons aussi que le « mouvement vertical généralisé »  est utilisé dans de terme d’advection verticale.

En coordonnée , les équations deviennent alors :

 (G14.12)

 (G14.13)

 (G14.6)

 (G14.14)

cette dernière équation est démontrée en Annexe.

La condition cinématique

 (G14.16)

fournit une équation reliant la hauteur réelle  et le mouvement vertical réel .

**Coordonnée verticale de pression hydrostatique suivant la topographie**

Coordonnée verticale de pression hydrostatique

Laprise (1992) a utilisé proposé une coordonnée verticale utilisant la notion de pression hydrostatique applicable aux équations pleinement élastiques. Cette coordonnée a l’avantage de donner aux équations non-hydrostatiques une forme assez semblable à celle des équations hydrostatiques exprimées en coordonnée verticale de pression.

La pression hydrostatique, notée , est définie comme le poids de la colonne atmosphérique au-dessus d’un point :



où  est le poids de l’atmosphère au sommet du domaine de calcul du modèle, supposé constant par la suite. Notons aussi que  correspond à la masse de la colonne d’air au-dessus d’un point.

La pression hydrostatique à la surface est obtenue comme suit :



On a ainsi la relation hydrostatique reliant  et  :

 (G14.17)

où  est le géopotentiel.

Coordonnée suivant la topographie

Une coordonnée suivant la topographie (*terrain-following* en anglais) basée sur une version à l’échelle de la coordonnée de pression hydrostatique a été proposée par Laprise (1992) :



avec



et



pour , avec ,  et  des constantes. Étant donné que  et , cette formulation garantit de satisfaire les conditions aux frontières  et .

La condition cinématique à la surface terrestre devient simplement une condition homogène



ce qui constitue l’avantage principal d’une coordonnée qui suit la topographie. Pour simplicité on applique arbitrairement une condition semblable au toit du domaine du modèle :

.

Les conditions cinématiques correspondent à un flux de masse nul à la surface terrestre et au toit du domaine du modèle, ce qui garantit la conservation de la masse en autant que le transport vertical est concerné.

La condition  donne un redressement des surface en s’élevant dans l’atmosphère, et le coordonnée verticale est alors dite hybride, car elle passe graduellement de la coordonnée  de Phillips dans les bas niveaux vers la coordonnée de pression dans les hauts nivaux. C’est l’approche qui a été retenue dans la version 3 de GEM (GEM3).

Notons qu’on peut aussi réécrire l’équation précédente comme suit :



Pour GEM4, on a plutôt privilégié une formulation en terme du logarithme de la pression hydrostatique :

 (G14.23)

avec



dans l’intervalle , avec  et  des constantes. On peut faire le lien avec la coordonnée  de GEM3 en notant que  dans l’intervalle . Pour éviter toute confusion, le symbole  sera utilisé pour référer la coordonnée verticale de GEM4 et la distinguer de celle de GEM3. Dans GEM4, la fonction suivante est utilisée :

 (G14.24)

Une fonction  variant linéairement de  à  permet de rectifier graduellement au-dessus du relief, puis plus rapidement avec l’altitude (voir Figure 3 de Girard et al. 2014). Vu que  et , ceci assure que  et . Les conditions cinématiques à la surface terrestre et au toit du domaine du modèle deviennent simplement



,

correspondant à un flux de masse nul, ce qui garantit la conservation de la masse en autant que le transport vertical est concerné.

Équations en coordonnée 

Nous allons maintenant réécrire les équations en coordonnée , qui découlent directement de celles écrites précédemment en  étant donné que  :

 (G14.18)

 (G14.19)

 (G14.6)

 (G14.20)

 (G14.21)

où

 (G14.22)

et avec la dérivée totale en coordonnée  comme suit :



Le dernier terme à gauche de (G14.18) a été obtenu de l’équation (G14.12) en combinant le terme  à l’équation hydrostatique (G14.17) pour le transformer comme suit :



De même le terme  de l’équation (G14.13) a été combiné à l’équation hydrostatique (G14.17) pour le transformer comme suit dans (G14.19) :



Le premier terme de l’équation (G14.14), , est transformé avec l’équation hydrostatique (G14.17) pour le réécrire comme suit dans (G14.20) :



Changement de variables dépendantes

Suivant Girard et al. (2014), on effectue les changements de variables suivants :



avec ,  et . Clairement dans le cas hydrostatique  et donc .

Les équations se transforment ainsi.

L’équation du mouvement horizontal (G14.18) devient

 (G14.25)

parce que  et .

L’équation du mouvement vertical (G14.19) demeure inchangée :

 (G14.26)

Vu que , l’équation thermodynamique (G14.6) peut se réécrire

 (G14.27)

Notant que , donc  et ,

on a  et ,

de sorte que l’équation de continuité (G14.20) se transforme ainsi :

 (G14.28)

Notant que , l’équation cinématique (G14.21) devient

 (G14.29)

Variables historiques

Dans le cas d’équations les plus simples, les variables historiques (*history-carrying variables* en anglais) sont généralement choisies comme celles pour lesquelles on dispose d’une équation pronostique. Mais dans un système d’équations discrètes solutionné par un schéma implicite, nul n’est besoin d’avoir une coïncidence entre variables historiques et variables pronostiques.

Nous avons vu ci-dessus qu’il y a 6 équations pronostiques (G14.25 – G14.29). Dans le cas de GEM4, le choix suivant a été fait pour les 6 variables historiques : , , , , ainsi que la combinaison de  en altitude et  à la surface. Pour fermer le système, on doit définir  et  avec les relations « diagnostiques » qui les relient aux variables historiques.

Partant de la relation pour  en (G14.22)

 (G14.22)

avec  et , on peut écrire



donc

 (G14.30)

Partant de la relation hydrostatique

 (G14.17)

après multiplication par  et en utilisant la définition de  avec  :



Notant que



on obtient alors une équation pour  :

 (G14.31)

Au besoin cette équation peut être intégrée à la verticale à partir de  pour obtenir .

Équations continues de GEM4

Ceci complète la description des équations continues de GEM4 que nous résumons ci-dessous :

 (G14.25)

 (G14.26)

 (G14.27)

 (G14.28)

 (G14.29)

 (G14.30)

 (G14.31)

Dans le cas hydrostatique,  donc  et .

Pour rappel :





 (G14.22)